JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 4, 165–182 (1971)

Optimale lineare Approximation beschränkter Mengen in normierten Räumen

HANS-PETER HELFRICH

Institut für Angewandte Mathematik, Albert-Ludwigs Universität, Freiburg, Germany

Communicated by G. G. Lorentz

1. EINLEITUNG

Die Elemente einer Menge A eines linearen normierten Raumes X seien durch Elemente eines n-dimensionalen Teilraumes L zu approximieren. Die *Abweichung*

$$d_X(A, L) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in L} \| x - y \| = \sup_{x\in A} d(x, L) \tag{1.1}$$

gibt an, wie gut dies möglich ist; dabei ist

$$d(x, L) := \inf_{y\in L} \| x - y \| \tag{1.2}$$

der Abstand eines Elementes x vom Teilraum L. Als Mass für die Güte der Approximierbarkeit der Menge A in Raume X durch n-dimensionale Teilräume führte A. Kolmogorov [7] den Begriff des *n-dimensionalen Durchmessers* ein, der wie folgt definiert ist

$$d_n{}^X(A) := \inf_{\dim L = n} d_X(A, L). \tag{1.3}$$

Das Infimum läuft dabei über alle n-dimensionalen Teilräume $L \subset X$. Teilräume L der Dimension n mit $d_n(A) = d_X(A, L)$ werden *extremal* genannt. Die Kenntnis eines extremalen Teilraumes L liefert eine in gewissem Sinne beste Approximationsmethode, doch in praktischen Fällen müsste man dann auch wissen, wie zu jeden Element $x \in A$ ein Element $x_0 \in L$ mit $\| x - x_0 \| = d(x, L)$ zu finden ist, was numerisch schwierig sein kann.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen kann man fragen, wie die Elemente x der Menge A durch Elemente Px eines n-dimensionalen Teilraumes $L \subset X$ approximierbar sind, wenn nur lineare Approximationsoperatoren $P : A \to L$ zugelassen werden. Eine untere Schranke für die Güte der Approximation ist der n-dimensionale *lineare* Durchmesser von A, der von V. Tihomirov [15] eingeführt wurde:

$$d_n'(A) = \inf_{\dim L=n} \inf_{P:X\to L} \sup_{x\in A} \| x - Px \|. \tag{1.4}$$

Das eine Infimum ist über alle n-dimensionalen Teilräume $L \subset X$, das andere über alle linearen Operatoren P, die X in L abbilden, zu erstrecken. Nun lässt sich jeder lineare Operator $P : X \to L$ in der Form $Px = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i$ mit einer Basis $x_1, ..., x_n$ von L und n linearen auf X definierten Funktionalen $f_1, ..., f_n$ darstellen. Aus diesem Grunde ist leicht einzusehen, dass

$$d_n'(A) \geqslant d_X{}^n(A)$$

gilt bei

$$d_X{}^n(A) = \inf_{f_1,\ldots,f_n \in X'} \sup_{\substack{f_i(x)=0,\, i=1,\ldots,n \\ x\in A}} \| x \|. \tag{1.5}$$

Hierbei ist das Infimum über alle n-Tupel linearer Funktionale aus X', dem algebraischen Dualraum von X, zu bilden. Nach V. Tihomirov [14, 15] wurde die Grösse $d_X{}^n(A)$, der *Durchmesser der Ordnung n*, von Gel'fand eingeführt. Tihomirov lässt bei der Bildung des Infimums nur stetige lineare Funktionale zu, doch erweist es sich in der vorliegenden Arbeit als zweckmässig, diese Einschränkung nicht zu machen.

In Satz 1 dieser Arbeit wird die Existenz von n in dem Sinne *optimalen* Funktionalen $f_1, ..., f_n$ gezeigt, durch die das Infimum in (1.5) angenommen wird. Der Satz 2 behandelt eine wichtige Anwendung von Satz 1, nämlich den Fall, dass ein Hilbertraum H mit Norm $\| \cdot \|$ in einem normierten Raum X mit Norm $| \cdot |$ stetig eingebettet ist. Es wird die Existenz eines optimalen Operators $P_n : H \to L_n$ gezeigt, der in einen n-dimensionalen Teilraum L_n abbildet, so dass

$$| x - P_n x | \leqslant d^n \| x \| \tag{1.6}$$

gilt und es keinen linearen Operator $Q : H \to M_n$ gibt mit $M_n \subset X$ und $\dim M_n = n$, der einer Beziehung (1.6) mit einer Konstanten $< d^n$ genügt. Die optimale Konstante d^n ist dabei der Durchmesser der Ordnung n der Einheitskugel $S_H = \{x \in H \mid \| x \| \leqslant 1\}$ genommen in Raum X. Überdies kann P_n bei passend gewähltem L_n als Orthogonalprojektor auf L_n gewählt werden. In Satz 3 wird bewiesen, dass der Durchmesser der Ordnung n der duale Begriff zum n-dimensionalen Durchmesser ist. Dies wird in Satz 4 auf einen dem Satz 2 analogen Fall übertragen und ein Zusammenhang zwischen optimalen Orthogonalprojektoren und gewissen extremalen Unterräumen hergestellt. Mit Hilfe von Satz 4 und einer Methode von Rudin [11] können Grössenordnungen von Durchmessern der Ordnung n erhalten werden, was in Satz 5 an einem Beispiel durchgeführt wird. Damit wird auch eine Frage von Nitsche in [10] beantwortet. Dort werden neue Fehlerabschätzungen für ein Differenzenverfahren zur Lösung der Gleichung

$$\Delta u = f, \qquad u \in W_2^2(Q) \cap \mathring{W}_2^1(Q)$$

für den Musterfall eines Quadrates $Q \subset \mathbf{R}^2$ angegeben. Unter anderem wird die Abschätzung

$$| u - R_n u | \leqslant \frac{c}{n} \|f\| \tag{1.7}$$

allein unter der Voraussetzung $f \in L_2(Q)$ erhalten. Dabei liegen die Näherungen $R_n u$ in Teilräumen der Dimension n^2, $|u|$ bezeichnet die Maximums- und $\|f\|$ die $L_2(Q)$-Norm. Aus Satz 5 lässt sich schliessen, dass es keine linearen Näherungsoperatoren gibt, die die Abschätzung (1.7) abgesehen von der Konstanten c verbessern.

2. Existenzsätze

Seien $f_1, \ldots, f_n$ lineare Funktionale aus X', dem algebraischen Dualraum eines linearen normierten Raumes X und sei

$$G = \{x \in X \mid f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}.$$

Nach V. Tihomirov [14], [15] führen wir die Bezeichnung

$$\Delta(A, G) = \Delta(A; f_1, \ldots, f_n) := \sup_{x \in A \cap G} \| x \| \tag{2.1}$$

ein. Für den Durchmesser der Ordnung n (1.5) einer Menge $A \subset X$ können wir dann schreiben

$$d^n = d_X{}^n(A) = \inf_{\operatorname{codim} G = n} \Delta(A, G), \tag{2.2}$$

wobei das Infimum über alle Teilräume G von X der Kodimension n läuft.[1] Wir wollen zusätzlich verabreden

$$d^0 = d_X{}^0(A) := \sup_{x \in A} \| x \|. \tag{2.3}$$

Lemma 1. *Sei X_0 ein linearer Teilraum von X und $A \subset X_0$. Dann gilt*

$$d_X{}^n(A) = d_{X_0}^n(A). \tag{2.4}$$

[1] Es sei stets $\dim X > n$ vorausgesetzt.

Beweis. Das Lemma lässt sich unmittelbar aus den Definitionen und der bekannten Tatsache ableiten, dass sich auf einem Teilraum definierte lineare Funktionale zu solchen auf den ganzen Raum definierten erweitern lassen. Über die Menge A werde im folgenden immer vorausgesetzt, dass sie symmetrisch zum Nullpunkt[2] konvex und beschränkt ist. Auf der linearen Hülle sp A von A ist dann durch das Minkowski-Funktional

$$p(x) := \inf\{a^{-1} \mid ax \in A, a > 0\}, \qquad x \in \operatorname{sp} A \tag{2.5}$$

eine zweite Norm erklärt, die wir kurz p-Norm nennen wollen. Zur Unterscheidung nennen wir die vorgegebene Norm auch oft O-Norm. Entsprechend bezeichnen wir mit X^* bzw. X^p (für sp $A = X$) die topologischen Dualräume bezüglich der O- bzw. der p-Norm und mit $\| \cdot \|$ bzw. $\| \, \|_p$ die dort induzierten Normen. Da A in der O-Norm beschränkt vorausgesetzt ist, gilt (vgl. (2.3))

$$\| x \| \leqslant d^0 p(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \operatorname{sp} A. \tag{2.6}$$

Für die folgenden Lemmata sei sp $A = X$ vorausgesetzt. Unter Heranziehung von p können wir auch schreiben

$$\Delta(A, G) = \sup_{x \in G, p(x) \leqslant 1} \| x \|. \tag{2.7}$$

LEMMA 2. *Seien* $f_1, \ldots, f_n \in X'$, $G = \{x \mid f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, n\}$ *und* $G_j = \{x \mid f_i(x) = 0, i \neq j\}$. *Ist* f_j *für ein* j *in der* p*-Norm auf* G_j *unbeschränkt, so gilt*

$$\Delta(A, G_j) = \Delta(A, G). \tag{2.8}$$

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $d = \Delta(A, G_j)$. Aus (2.7) für $\Delta(A, G_j)$ ist zu entnehmen, dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in G_j$ mit $p(x_\delta) = 1$ und $\| x_\delta \| > d - \delta$ existiert. Wir setzen $M_\delta = | f_j(x_\delta) |$. Nach Voraussetzung ist f_j auf G_j unbeschränkt, es gibt also zu jedem $\epsilon > 0$ ein y_ϵ mit

$$y_\epsilon \in G_j, \qquad p(y_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_j(y_\epsilon) = 1.$$

Wir konstruieren ein $z_{\delta,\epsilon} \in G$ gemäss

$$z_{\delta,\epsilon} = \frac{x_\delta - f_j(x_\delta)\, y_\epsilon}{p(x_\delta - f_j(x_\delta)\, y_\epsilon)}. \tag{2.9}$$

Wird bei festgehaltenem δ die Zahl ϵ genügend klein gewählt, so ist wegen

$$p(x_\delta - f_j(x_\delta)\, y_\epsilon) \geqslant 1 - M_\delta \epsilon$$

[2] Die Ergebnisse dieser Arbeit werden nur für reelle normierte Räume formuliert. Doch gelten sie auch für komplexe Räume, wenn statt der Symmetrie die Äquilibrität der Menge A vorausgesetzt wird.

der Nenner in (2.9) von Null verschieden und daher $z_{\delta,\epsilon}$ definiert. Es ist $z_{\delta,\epsilon} \in G$ und

$$p(z_{\delta,\epsilon}) = 1, \qquad \| z_{\delta,\epsilon} \| \geqslant \frac{d - \delta - M_\delta \epsilon d^0}{1 + M_\delta \epsilon}.$$

Wählen wire rst δ und anschliessend ϵ genügend klein, so sehen wir, dass es zu jedem $\gamma < \delta$ ein $z = z_{\delta,\epsilon}$ gibt mit $z \in G$, $p(z) = 1$ und $\| z \| > \gamma$. Hieraus folgt die Behauptung.

FOLGERUNG. Ist $\Delta(A; f_1, ..., f_n) < d_X^{n-1}(A)$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass gilt

$$|f_j(x)| \leqslant C \left(p(x) + \sum_{i \neq j} |f_i(x)| \right), \qquad j = 1, ..., n. \tag{2.10}$$

Aus der Voraussetzung und Lemma 2 folgt nämlich, dass $f_1, ..., f_n$ linear unabhängig sind und f_j auf G_j in der p-Norm beschränkt ist. Wir können Punkte $x_1, ..., x_n$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, ..., n$ finden. Setzen wir

$$z_j = x - \sum_{i \neq j} f_i(x)\, x_i\,, \qquad \text{so ist} \quad z_j \in G_j\,, \quad f_j(x) = f_j(z_j)$$

und wir erhalten

$$|f_j(x)| \leqslant cp \left(x - \sum_{i \neq j} f_i(x)\, x_i \right) \leqslant C \left(p(x) + \sum_{i \neq j} |f_i(x)| \right)$$

mit $c = \max_i \| f_i \mid G_i \|_p$ und $C = c \max(1, p(x_1), ..., p(x_n))$.

LEMMA 3. *Aus $\Delta(A; f_1, ..., f_n) < d_X^{n-1}(A)$ folgt die Beschränktheit von $f_1, ..., f_n$ in der p-Norm.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existiert eine Folge $\{x_N\}$ mit $\sum_{i=1}^n |f_i(x_N)| = 1$ und $p(x_N) \to 0$ für $N \to \infty$. Nach Wahl einer geeigneten Teilfolge können wir annehmen

$$\lim_{N \to \infty} f_i(x_N) = b_i\,, \quad i = 1, ..., n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^n |b_i| = 1.$$

Wir wählen eine nichtsinguläre Matrix (a_{ij}) mit

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} b_j = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

und führen neue Funktionale $g_1, \ldots, g_n$ ein gemäss

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j .$$

Dann gilt $\lim_{N\to\infty} g_i(x_N) = \delta_{1i}$ und es ist $\lim_{N\to\infty} p(x_N) = 0$ sowie

$$\Delta(A; g_1, \ldots, g_n) = \Delta(A; f_1, \ldots, f_n) < d^{n-1},$$

was der Folgerung von Lemma 2 widerspricht.

Bemerkung. Lemma 2, die Folgerung und Lemma 3 sind in ähnlicher Form bei Golomb und Weinberger [6] zu finden, auch zum Teil die Beweisgedanken. Der Raum X trägt dort allerdings nur die p-Norm und es geht um die Fragestellung, ein gegebenes lineares Funktional durch n andere zu approximieren.

LEMMA 4. *Sei G ein in der p-Norm abgeschlossener linearer Teilraum von X der Kodimension n. Dann existieren $f_1, \ldots, f_n \in X^p$ mit $G_i = \{x \in X \mid f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, n\}$ und*

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad \|f_i\|_p = 1, \qquad p(x_i) \leqslant k_n, \qquad i, j = 1, \ldots, n \quad (2.11)$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten k_n.

Beweis. Der wesentliche Punkt ist die Unabhängigkeit der k_n von G bzw. $f_1, \ldots, f_n$. Aus den Voraussetzungen folgt nämlich, dass sich

$$G = \{x \in X \mid g_1(x) = \cdots = g_n(x) = 0\}$$

mit n linear unabhängigen in der p-Norm beschränkten Funktionalen $g_1, \ldots, g_n$ darstellen lässt. Wir setzen $H_i = \{x \in X \mid g_{i+1}(x) = \cdots = g_n(x) = 0\}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $H_n = X$. Sei $\| g_i \mid H_i \|_p = a_i$, wobei $a_i \neq 0$ aus der linearen Unabhängigkeit der g_i folgt. Wir setzen

$$\hat{g}_i(x) = \frac{1}{a_i} g_i(x) \qquad \text{für} \quad x \in H_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

und erweitern die $\hat{g}_i$ zu f_i auf X unter Erhaltung der p-Norm, was nach dem Satz von Hahn und Banach möglich ist. Dann ist $\|f_i\|_p = \|f_i \mid H_i\|_p = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $H_i = \{x \in X \mid f_{i+1}(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ sowie $G = \{x \in X \mid f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}$. Daher können wir für $\epsilon > 0$, insbesondere für $\epsilon = 1$ Elemente $y_1, \ldots, y_n \in X$ finden mit $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ für $i \geqslant j$ und $1 \leqslant p(y_i) < 1 + \epsilon = 2$. Weiter definieren wir induktiv

$$x_1 = y_1$$

$$x_j = y_j - \sum_{i=1}^{j-1} f_i(y_j)\, x_i\,, \qquad j = 2, \ldots, n$$

und können durch vollständige Induktion nach j zeigen, dass $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ für alle i und j gilt. Wir erhalten die Abschätzung

$$p(x_j) \leqslant 2 + 2 \sum_{i=1}^{j-1} p(x_i).$$

Hieraus folgt aber $p(x_j) \leqslant 2 \cdot 3^{j-1} \leqslant 2 \cdot 3^{n-1}$, d.h. (2.11) ist sicher richtig mit $k_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

LEMMA 5. *Sei $P = \{f \in X^p \mid \|f\|_p \leqslant 1\}$ die Einheitskugel in X^p, welche die Relativtopologie der X-Topologie von X^p trage. Dann ist die auf dem n-fachen topologischen Produkt P^n von P erklärte reellwertige Abbildung*

$$(f_1, \ldots, f_n) \to \Delta(A; f_1, \ldots, f_n)$$

in den Punkten $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in P^n$ mit linear unabhängigen $f_1, \ldots, f_n$ nach unten halbstetig.

Beweis. Sei ein Punkt $\mathbf{f}^0 = (f_1^0, \ldots, f_n^0) \in P^n$ mit linear unabhängigen Funktionalen $f_1^0, \ldots, f_n^0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition von $\Delta(A; \mathbf{f}^0)$ gibt es ein $x_0 \in A$ mit

$$f_i^0(x_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.12}$$

und

$$\| x_0 \| > \Delta(A; \mathbf{f}^0) - \epsilon. \tag{2.13}$$

Wir können $u_1^0, \ldots, u_n^0 \in X$ so finden, dass gilt

$$f_i^0(u_j^0) = \delta_{ij}\,. \tag{2.14}$$

Wir betrachten die folgende Umgebung U von $\mathbf{f}^0$ in P^n

$$U = \left\{ \mathbf{f} \in P^n \mid |f_i(x_0) - f_i^0(x_0)| < \epsilon,\ |f_i(u_j^0) - f_i^0(u_j^0)| < \frac{1}{2n}, i, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Zu $\mathbf{f} \in U$ suchen wir Elemente $u_1, \ldots, u_n \in X$ mit

$$f_i(u_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Dazu setzen wir mit einer $n \times n$ Matrix an

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.16}$$

Die Bedingung (2.15) ist erfüllt, wenn (a_{ij}) als Inverse der Matrix $(f_j(u_i^0))$ gewählt wird. Diese existiert, denn $(f_j^0(u_i^0))$ ist nach (2.14) die Einheitsmatrix und wegen $\mathbf{f} \in U$ ist die Norm (maximale Zeilenbetragssumme) der Matrix $(f_j(u_i^0) - f_j^0(u_i^0))$ kleiner als $1/2n \cdot n = 1/2$. Wir erhalten daher für die Norm die Abschätzung

$$\|(a_{ij})\| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \tag{2.17}$$

Aus (2.16) und (2.17) folgt

$$\begin{aligned} \| u_i \| &\leqslant 2 \max_{j=1,\ldots,n} \| u_j^0 \| \leqslant C \\ p(u_i) &\leqslant 2 \max_{j=1,\ldots,n} p(u_j^0) \leqslant C \end{aligned} \tag{2.18}$$

mit einer nur von $u_1^0, \ldots, u_n^0$ abhängigen Konstanten C. Wir betrachten nun das Element $z = x_0 - \sum_{j=1}^{n} f_j(x_0)\, u_j$ für das zufolge (2.15) $f_i(z) = 0, i = 1, \ldots, n$ gilt. Dies impliziert $\| z \| \leqslant \Delta(A; \mathbf{f})\, p(z)$ und mit (2.18)

$$\| x_0 \| - C \sum_{j=1}^{n} |f_j(x_0)| \leqslant \Delta(A; \mathbf{f}) \left(p(x_0) + C \sum_{j=1}^{n} |f_j(x_0)| \right).$$

Berücksichtigen wir $\mathbf{f} \in U$, (2.12), (2.13), $p(x_0) \leqslant 1$ und $\Delta(A; \mathbf{f}) \leqslant d^0$, so erhalten wir

$$\Delta(A; \mathbf{f}^0) - (Cn + Cnd^0 + 1)\, \epsilon \leqslant \Delta(A; \mathbf{f}).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Nach diesen vorbereitenden Lemmata sind wir in der Lage, einen Satz über die Existenz optimaler Funktionale zu beweisen.

Satz 1. *Sei X ein reeller linearer normierter Raum, A eine symmetrische, beschränkte und konvexe Teilmenge von X mit* sp $A = X$. *Dann existieren n lineare Funktionale $f_1, \ldots, f_n \in X^p$, die in dem Sinne optimal sind, dass gilt*

$$d_X{}^n(A) = \Delta(A; f_1, \ldots, f_n). \tag{2.19}$$

Bemerkung. Lemma 1 zeigt, dass die Voraussetzung $\operatorname{sp} A = X$ keine Einschränkung der Allgemeinheit ist. Wir verzichten daher auf eine Formulierung des Satzes für $\operatorname{sp} A \neq X$.

Beweis. Wir nehmen zunächst $d_X{}^n(A) < d_X^{n-1}(A)$ an. Aus Lemma 3 wissen wir, dass wir uns bei der Suche des Infimums von $\Delta(A; f_1, ..., f_n)$ auf Funktionale $f_1, ..., f_n \in X^p$ beschränken können; wir können sogar $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) \in P^n$ annehmen, wobei P und P^n die Bedeutung wie in Lemma 5 haben und die dort angegebene Topologie tragen sollen. Es ist bekannt (vgl. Dunford und Schwartz [5, pp. 423–424]), dass P und nach einen Satz von Tyhonov auch P^n kompakt sind. Weiter nimmt eine auf einer kompakten Menge nach unten halbstetige Funktion dort ihr Minimum an. Da wir die Halbstetigkeit der Funktion $\Delta(A; \mathbf{f})$ in Lemma 5 nur für die Punkte $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) \in P^n - L$ bewiesen haben, wobei

$$L = \{(f_1, ..., f_n) \in P^n \mid f_1, ..., f_n \text{ linear abhängig}\}$$

ist, suchen wir eine offene Umgebung $U \supset L$ mit der Eigenschaft:

(i) Zu jedem $\delta > d^n(A)$ gibt es ein $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) \in P^n - U$ mit $\Delta(A; \mathbf{f}) < \delta$.

Für eine solche Umgebung U ist $\Delta(A; \mathbf{f})$ auf $P^n - U$ nach unten halbstetig, ausserdem ist $P^n - U$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt. Die Funktion $\Delta(A; \mathbf{f})$ nimmt also dort ihr Minimum an, das aber dann wegen (i) zugleich Minimum auf P^n ist. Nehmen wir an, es gäbe keine Umgebung U mit der Eigenschaft (i). Dann gibt es zu jeder Umgebung U von L ein $\delta > d^n(A)$, so dass für alle $\mathbf{f} \in P^n$ mit $\Delta(A; \mathbf{f}) < \delta$ gilt $\mathbf{f} \in U$. Mit zwei festgehaltenen Zahlen δ_1, δ_2 gemäss $d^n < \delta_1 < \delta_2 < d^{n-1}$ können wir $\delta < \delta_1$ annehmen. Da $\Delta(A; \mathbf{g}) \geqslant d^{n-1} > \delta_2$ für $\mathbf{g} \in L$ ist, gibt es zu jedem $\mathbf{g} \in L$ ein $x_{\mathbf{g}}$ mit $g_i(x_{\mathbf{g}}) = 0$, $i = 1, ..., n$, $\| x_{\mathbf{g}} \| \geqslant \delta_2$, $p(x_{\mathbf{g}}) = 1$. Wir ordnen jedem $\mathbf{g} \in L$ die Umgebung

$$U_{\mathbf{g}} = \{(f_1, ..., f_n) \in P^n \mid |f_i(x_{\mathbf{g}})| < \epsilon, i = 1, ..., n\} \quad \text{zu, wobei } \epsilon > 0$$

im folgenden festgehalten wird. Wir setzen $U = \bigcup_{\mathbf{g} \in L} U_{\mathbf{g}}$. Zu diesem U gibt es ein δ im obigen Sinne. Nach Definition von d^n gibt es ein $\mathbf{f} \in P^n$ mit $\Delta(A; \mathbf{f}) < \delta$ und nach Lemma 4 können wir $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$ sowie Elemente $x_1, ..., x_n \in X$ gemäss (2.11) gewählt denken. Wegen $\Delta(A; \mathbf{f}) < \delta$ ist $\mathbf{f} \in U$, d.h. es gibt ein $x = x_{\mathbf{g}}$ mit $p(x) = 1$, $\| x \| \geqslant \delta_2$ und $|f_i(x)| < \epsilon$ für $i = 1, ..., n$. Wir setzen[3]

$$z = \frac{x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i}{p(x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i)}$$

[3] Für $\epsilon < 1/nk_n$ ist der Nenner in der Definition für z von Null verschieden.

und es ist $p(z) = 1, f_i(z) = 0,\ i = 1,..., n$. Unter Beachtung von (2.11) folgt

$$\| z \| \geqslant \frac{\| x \| - n\epsilon k_n d^0}{1 + n\epsilon k_n} \geqslant \frac{\delta_2 - n\epsilon k_n d^0}{1 + n\epsilon k_n}. \tag{2.20}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\Delta(A; \mathbf{f}) < \delta < \delta_1$, denn wir können ϵ so klein gewählt annehmen, dass der Ausdruck ganz rechts in (2.20) $\geqslant \delta_1$ ist. Damit ist Satz 1 für den Fall $d^n < d^{n-1}$ bewiesen. Ist $d^n = d^{n-1}$, so suchen wir das kleinste m mit $d^n = d^{n-1} = \cdots = d^m$. Ist $m \geqslant 1$, so gilt dann $d^m < d^{m-1}$ und wir wissen, dass die Funktion $\Delta(A; f_1, ..., f_m)$ ihr Minimum annimmt, es also $f_1, ..., f_m \in X^p$ gibt mit $\Delta(A; f_1, ..., f_m) = d^m$. Nehmen wir beliebige Funktionale $f_{m+1}, ..., f_n \in X^p$ hinzu, so folgt wegen $d^n \leqslant \Delta(A; f_1, ..., f_n) \leqslant \Delta(A; f_1, ..., f_m) = d^m$ und $d^m = d^n$ die Optimalität von $f_1, ..., f_n$. Ist $m = 0$, so ist die Behauptung des Satzes trivial, da dann $\Delta(A; f_1, ..., f_n)$ gar nicht von $f_1, ..., f_n$ abhängt.

Der nun folgende Satz 2 ist eine wichtige Anwendung von Satz 1.

SATZ 2. *Sei X ein linearer normierter Raum mit Norm $|\cdot|$, H ein in X liegender Hilbertraum mit Norm $\| \ \|$ und die Inklusion $H \to X$ stetig. Dann gibt es einen n-dimensionalen Teilraum $L_n \subset H$, so dass die Orthogonalprojektion $P : H \to L_n$ im folgenden Sinne optimal ist: Es gibt eine Zahl d^n, so dass*

$$| x - Px | \leqslant d^n \| x \| \qquad \text{für alle} \quad x \in H \tag{2.21}$$

und kein linearer Operator $Q : H \to M_n$, der in einen n-dimensionalen Teilraum $M_n \subset X$ abbildet, genügt einer Beziehung

$$| x - Qx | \leqslant c \| x \| \qquad \text{für alle} \quad x \in H \tag{2.22}$$

mit einem $c < d^n$. Die optimale Konstante d^n ist der Durchmesser $d^n = d_X{}^n(S_H)$ der Ordnung n der Menge $S_H = \{x \in H \mid \| x \| \leqslant 1\}$ im Raum X.

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst, dass ein Operator $P : H \to L_n$ der (2.21) mit $d^n = d_X{}^n(S_H)$ genügt, optimal ist. Sei $Q : H \to M_n$ ein linearer Operator, der in einen n-dimensionalen Teilraum $M_n \subset X$ abbildet und (2.22) mit einer Zahl c genügt. Wir können Q in der Form $Qx = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, x_i$ mit $f_1, ..., f_n \in X'$ und einer Basis $x_1, ..., x_n$ von M_n darstellen. Wegen (2.22) impliziert $f_i(x) = 0$, $i = 1, ..., n$ und $\| x \| \leqslant 1$, dass $| x | \leqslant c$; daraus folgt $c \geqslant d^n$.

(ii) Aus Satz 1 und Lemma 1 wissen wir, dass es einen linearen und in H abgeschlossenen Teilraum G von H der Kodimension n gibt mit

$$d^n = \sup_{x \in G, \|x\| \leqslant 1} | x |. \tag{2.23}$$

Sei L_n das orthogonale Komplement von G in H, das die Dimension n hat, und $P : H \to L_n$ der Orthogonalprojektor auf L_n. Es ist dann $x - Px \in G$ für alle $x \in H$ und daher wegen (2.22) $| x - Px | \leqslant d^n \| x - Px \| \leqslant d^n \| x \|$ für alle $x \in H$. Q.E.D.

3. Dualitätssätze

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass der Durchmesser der Ordnung n der duale Begriff zum n-dimensionalen Durchmesser (1.3) ist. Wir wollen dabei wieder eine Menge A, dei denselben Voraussetzungen wie in Satz 1 genüge, in einem normierten Raum X betrachten. Wegen (2.6) ist jedes in der O-Norm stetige Funktional auch in der p-Norm stetig, wir haben also $X^* \subset X^p$. Sei S_{X^*} die Einheitskugel in X^*. Weiter sei für lineare Teilräume $L \subset X$ bzw. $M \subset X^*$.

$$L^\perp = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in L\},$$
$$M_\perp = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in M\}.$$

Dann gilt

Satz 3. *Der Durchmesser der Ordnung n der Menge A ist gleich dem n-dimensionalen Durchmesser der Menge S_{X^*} in der Norm des Raumes X^p.*

$$d_X{}^n(A) = d_n^{X^p}(S_{X^*}). \tag{3.1}$$

Linear unabhängige Funktionale $f_1, \ldots, f_n \in X^p$ sind genau dann optimal, wenn sie einen extremalen n-dimensionalen Teilraum für die Menge S_{X^*} in X^p aufspannen.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir ein Lemma von Singer und R. Buck [3].

Lemma 6. (I. Singer [12, pp. 15–20]). (i) *Für $x_0 \in X$ und einen linearen Teilraum $L \subset X$ gilt*

$$\inf_{x \in L} \| x_0 - x \| = \max_{\substack{f \in L^\perp \\ \|f\| \leqslant 1}} | f(x_0) |. \tag{3.2}$$

(ii) *Für $f_0 \in X^*$ und einen in der X-Topologie von X^* abgeschlossenen Teilraum $M \subset X^*$ gilt*

$$\min_{f \in M} \| f_0 - f \| = \sup_{\substack{x \in M_\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} | f_0(x) |. \tag{3.3}$$

Beweis von Satz 3. Seien $f_1, \ldots, f_n$ Elemente aus X^p und M deren lineare Hülle. Da M endlichdimensional ist, ist es in der X-Topologie von X^p abgeschlossen. Nach Definition von $\Delta(A; f_1, \ldots, f_n)$ und Lemma 6 gilt

$$\begin{aligned}\Delta(A; f_1, \ldots, f_n) &= \sup_{\substack{f_i(x)=0, i=1,\ldots,n \\ p(x)\leqslant 1}} \| x \| = \sup_{\substack{x\in M_\perp \\ p(x)\leqslant 1}} \| x \| \\ &= \sup_{\substack{x\in M_\perp \\ \|x\|\leqslant 1}} \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leqslant 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leqslant 1}} \sup_{\substack{x\in M_\perp \\ p(x)\leqslant 1}} |f(x)| \\ &= \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leqslant 1}} \inf_{g\in M} \| f - g \|_p = d_{X^p}(S_{X^*}, M).\end{aligned}$$

Durchläuft $(f_1, \ldots, f_n)$ alle n-Tupel linear unabhängiger Funktionale von X^p, so durchläuft M alle n-dimensionalen Teilräume und unter Beachtung von Lemma 3 folgt (3.1). Auch wird sofort klar, dass die Optimalität von $f_1, \ldots, f_n$ die Extremalität des aufgespannten Teilraumes impliziert und umgekehrt.

Bemerkung. Auf diese Weise kann man einen anderen Beweis von Satz 1 erhalten, indem man einen Satz von A. Garkavi [5] (vgl. Singer [12, pp. 265–268]) heranzieht, der besagt, dass in jeder Menge in Dualraum X^* eines normierten Raumes ein extremaler Teilraum $M \subset X^*$ existiert.

Wir übertragen nun Satz 3 auf einen Satz 2 analogen Fall.

SATZ 4. *Sei X_0 ein linearer normierter Raum mit Norm $|\cdot|_0$, H ein stetig in X_0 eingebetteter Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$. Weiter sei*

$$X_1 = \{x \in H \mid \sup_{|y|_0 \leqslant 1, y\in H} |(x, y)| < \infty\}. \tag{3.4}$$

Dann ist X_1 mit der Norm

$$| x |_1 := \sup_{|y|_0 \leqslant 1} |(x, y)| \tag{3.5}$$

ein linearer normierter Raum und es gilt

$$d^n_{X_0}(S_H) = d_n{}^H(S_{X_1}) \tag{3.6}$$

mit $S_H = \{x \in H \mid \| x \| \leqslant 1\}$ und $S_{X_1} = \{x \in X_1 \mid | x |_1 \leqslant 1\}$. Ein Orthogonalprojektor $P_n : H \to L_n$ auf einen n-dimensionalen Teilraum $L_n \subset H$ ist genau dann für die Menge S_H bezüglich der O-Norm optimal im Sinne von Satz 2, wenn L_n ein extremaler Teilraum für die Menge S_{X_1} bezüglich derHilbertnorm ist.

Bemerkung. Ist H dicht in X_0 (was wir aber nicht benötigen), so nennt Amann [2] die Räume X_0, H, X_1 in normaler Lage. Auch die Konstruktion des Raumes X_1 zu gegebenen Räumen X_0 und H wird dort durchgeführt.

Beweis. Ohne Schwierigkeit lässt sich verifizieren, dass X_1 ein linearer normierter Raum ist. Weiter lässt sich zeigen, dass die Zuordnung der Elemente $x \in X_1$ zu linearen Funktionalen f, die durch $f(y) = (y, x)$ für $y \in H$ erklärt sind, eine lineare Isometrie von X_1 auf den Dualraum von H der O-Norm liefert. Auf diese Weise lässt sich Satz 4 mit Hilfe von Satz 3 unter Hinzunahme des Beweisgedankens von Satz 2 und Lemma 1 beweisen.

4. Beispiel

Sei $X_0 = C(\bar{\Omega})$ der Raum Funktionen u, die auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{\Omega}$ eines beschränkten Gebietes Ω des $\mathbf{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) definiert und stetig sind. X_0 trage die Maximumsnorm

$$| u |_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} | u(x) |. \tag{4.1}$$

Wir wollen die Menge

$$S_H = \left\{ u \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx \leqslant 1 \right\} \tag{4.2}$$

mit linearen Methoden approximieren. Dabei seien $W_2^2(\Omega)$ bzw. $W_2^1(\Omega)$ der Sobolev-Raum der Funktionen auf Ω mit quadratisch integrierbaren verallgemeinerten Ableitungen zweiter bzw. erster Ordnung und $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ die Abschliessung in $W_2^1(\Omega)$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. S_H ist die Einheitskugel in dem Hilbertraum[4] $H = W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$ mit dem inneren Produkt

$$(u, v) = \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx. \tag{4.3}$$

Es ist bekannt (vgl. Agmon [1], und W. Smirnow [13]), wenn wir neben der Beschränktheit von Ω noch die Zugehörigkeit des Randes zur Klasse C^2 voraussetzen (für $N = 2$ und 3), dass durch (4.3) mit $\| u \| = (u, u)^{1/2}$ eine Norm auf H definiert wird, die dort der $W_2^2(\Omega)$-Norm äquivalent ist und insbesondere H in dieser Norm vollständig ist. Da wir $N \leqslant 3$ vorausgesetzt hatten, gilt nach dem Sobolevschen Einbettungssatz $| u |_0 \leqslant c_0 \| u \|$ mit

[4] Für $N = 1$ können wir X_0 mit $C[a, b]$ und H mit dem Raum $\{x \in C[a, b] \mid x(a) = x(b) = 0, x' \text{ absolutstetig}, x'' \in L_2[0, 1]\}$ identifizieren.

einer nur von Ω und N abhängigen Konstanten c_0. Auf die Räume X_0 und H treffen also die Voraussetzungen von Satz 4 zu.

SATZ 5. *Für den Durchmesser der Ordnung n der Menge S_H* (4.2) *im Raum $X_0 = C(\bar{\Omega})$ gelten die Abschätzungen*

$$c_1 n^{-2/N+1/2} \leqslant d^n_{X_0}(S_H) \leqslant c_2 n^{-2/N+1/2} \tag{4.4}$$

mit nur von Ω und N abhängigen Konstanten c_1, $c_2 > 0$. Anders ausgedrückt: Für jedes natürliche n gibt es einen n-dimensionalen Teilraum $H_n \subset H$ und einen linearen Operator $P_n : H \to H_n$, so dass

$$| x - P_n x |_0 \leqslant d^n \| x \| \qquad \textit{für alle} \quad x \in H \tag{4.5}$$

mit $d^n = O(n^{-3/2})$ gilt und es gibt keine Folge n-dimensionaler Teilräume $H_n \subset X_0$ und linearer Operatoren $P_n : H \to H_n$, so dass (4.5) *mit $d^n = o(n^{-3/2})$ gültig ist.*

Beweis. Es genügt (4.4) zu zeigen, da der zweite Teil der Behauptung dann unmittelbar aus Satz 2 folgt.

(i) Zunächst schätzen wir $d^n = d^n_{X_0}(S_H)$ nach oben ab. Da Ω beschränkt vorausgesetzt ist, gibt es einen Kubus

$$K = \{x \in \mathbf{R}^N \mid a \leqslant x_i \leqslant a + h, \, i = 1,..., N\}$$

mit $\bar{\Omega} \subset \mathring{K}$. Nach dem Calderonschen Erweiterungssatz (vgl. Agmon [1]) lässt sich jedes $u \in H$ zu einer Funktion $\tilde{u} \in \mathring{W}_2^2(K)$ fortsetzen, so dass $u(x) = \tilde{u}(x)$ für jedes $x \in \Omega$ und

$$\left(\int_K (\Delta \tilde{u})^2 \, dx\right)^{1/2} \leqslant c_3 \| u \| \tag{4.6}$$

mit einer nicht von n abhängigen Konstanten $c_3 > 0$ gilt. Wir können $\tilde{u}$ in eine Fourierreihe nach Sinustermen entwickeln

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \sin 2\pi h k_1(x_1 - a) \cdots \sin 2\pi h k_N(x_N - a),$$

wobei über alle $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_N)$ mit natürlichen $k_1, ..., k_N$ zu summieren ist. Da $\tilde{u} \in \mathring{W}_2^2(K)$ ist, konvergiert die Reihe in der $W_2^2(K)$-Norm und nach dem Sobolevschen Einbettungssatz auch in der Maximumsnorm. Es ist

$$\int_K (\Delta \tilde{u})^2 \, dx = \frac{h^N}{2^N} \cdot 4\pi^2 h^2 \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^2 (k_1^2 + \cdots + k_N^2)^2$$

und wegen (4.6)

$$\left(\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^2(k_1^2 + \cdots + k_N^2)^2\right)^{1/2} \leqslant c_4 \| u \| \tag{4.7}$$

mit einer nur von Ω und N abhängigen Konstanten $c_4 > 0$. Für $l = 1, 2,...$ und $m = l^N$ setzen wir

$$P_m u = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant l} a_{\mathbf{k}} \sin 2\pi h k_1(x_1 - a) \cdots \sin 2\pi h k_N(x_N - a),$$

wobei $|\mathbf{k}| = \max(k_1 ,..., k_N)$ bezeichnet. Unter Berücksichtigung von (4.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} | u - P_m u |_0 &\leqslant \sum_{|\mathbf{k}| > l} | a_{\mathbf{k}} | \\ &\leqslant \left(\sum_{|\mathbf{k}| > l} a_{\mathbf{k}}^2(k_1^2 + \cdots + k_N^2)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{|\mathbf{k}| > l} (k_1^2 + \cdots + k_N^2)^{-2}\right)^{1/2} \\ &\leqslant c_5 l^{N/2-2} \| u \|. \end{aligned}$$

P_m ist ein linearer Operator, der H in einen Teilraum von $X_0 = C(\bar{\Omega})$ der Dimension $m = l^N$ abbildet. Es folgt daher

$$d^m \leqslant c_5 l^{N/2-2} = c_5 m^{-2/N+1/2}$$

für $m = l^N$, $l = 1, 2,...$. Berücksichtigt man, dass d^n eine monoton fallende Folge ist, so folgt hieraus die Gültigkeit der rechten Ungleichung in (4.4).

(ii) Um eine untere Schranke für d^n zu bekommen, wenden wir Satz 4 an, dessen Voraussetzungen, wie bereits erwähnt, für die in diesem Paragraphen eingeführten Räume X_0 und H erfüllt sind. Hiernach gilt $d^n = d^n_{X_0}(S_H) = d_n{}^H(S_{X_1})$, wobei X_1 durch (3.4) gegeben ist und die Norm (3.5) trägt. Den n-dimensionalen Durchmesser $d_n{}^H(S_{X_1})$ der Einheitskugel in X_1 schätzen wir mit einer Methode von W. Rudin [11] ab, mit der W. Rudin Durchmesser von Klassen Lipschitzbeschränkter Funktionen und solcher beschränkter Variation in $L_2[0, 1]$ bestimmte. Sei H_n ein beliebiger n-dimensionaler Teilraum von H. Es lässt sich eine orthonormierte Basis $\varphi_1 ,..., \varphi_n$ von H finden, die sich wegen der Separabilität zu einem vollständigen Orthonormalsystem $\varphi_1 ,..., \varphi_n , \varphi_{n+1} ,...$ von H erweitern lässt. Sei $\psi_1 ,..., \psi_{2n}$ ein weiteres Orthonormalsystem mit $\psi_i \in X_1$ für $i = 1,..., n$. Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\| \psi_k \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\psi_k , \varphi_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} (\psi_k , \varphi_i)^2$$

und nach Definition (1.1) der Abweichung $d_H(S_{X_1}, H_n)$

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\psi_k, \varphi_i)^2 + (d_H(S_{X_1}, H_n))^2 \mid \psi_k \mid_1^2$$

Summation von $k = 1,\ldots, 2n$ liefert unter Beachtung der Besselschen Ungleichung

$$2n \leqslant n + (d_H(S_{X_1}, H_n))^2 \sum_{k=1}^{2n} \mid \psi_k \mid_1^2 .$$

Da H_n beliebig war, folgt

$$d_n{}^H(S_{X_1}) \geqslant \frac{n^{1/2}}{(\sum_{k=1}^{2n} \mid \psi_k \mid_1^2)^{1/2}}. \tag{4.8}$$

Wir müssen nun ein passendes Orthonormalsystem $\psi_1, \ldots, \psi_{2n}$ finden. Sei φ eine beliebige nicht identisch verschwindende Funktion aus $C_0{}^\infty[0, 1]$, der Menge der auf dem Intervall $[0, 1]$ definierten, beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger im offenen Intervall $(0, 1)$. Weiter sei $K_0 = \{x \in \mathbf{R}^N \mid a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + h_0, i = 1,\ldots, n\}$ ein Kubus mit Katenlänge $h_0 > 0$, der ganz in Ω liege. Für jedes $m = 1, 2,\ldots$ und $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ mit $\mid \mathbf{k} \mid = \max(k_1, \ldots, k_N) \leqslant 2m$ bezeichnen wir mit $\psi_{m,\mathbf{k}}$ Funktionen, die durch die Bedingungen $\psi_{m,\mathbf{k}} \in H$ und

$$\Delta\psi_{m,\mathbf{k}} = \begin{cases} \alpha_m \prod_{i=1}^{N} \varphi \left\{ \dfrac{2m}{h_0}(x_i - a_i) - k_i + 1 \right\} & \text{für } \dfrac{k_i - 1}{2m} \leqslant \dfrac{x_i - a_i}{h_0} \leqslant \dfrac{k_i}{2m} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

festgelegt[5] sind, wobei

$$\alpha_m = \frac{2^{N/2} m^{N/2}}{(c_6 h_0)^{N/2}}, \qquad c_6 = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx. \tag{4.9}$$

Die Bedingung (4.9) für α_m garantiert $\| \psi_{m,\mathbf{k}} \| = 1$, was man unschwer nachrechnet. Für jedes m haben wir somit $(2m)^N$ Funktionen, von denen je zwei Funktionen $\psi_{m,\mathbf{k}}$ und $\psi_{m,\mathbf{l}}$ für $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$ zueinander orthogonal sind, da die Träger von $\Delta\psi_{m,\mathbf{k}}$ und $\Delta\psi_{m,\mathbf{l}}$ disjunkt sind. Wegen $\Delta\psi_{m,\mathbf{k}} \in C_0{}^\infty(\Omega)$ gilt für $u \in H$

$$(u, \psi_{m,\mathbf{k}}) = \int_\Omega \Delta u\, \Delta\psi_{m,\mathbf{k}}\, dx = - \int_\Omega u \Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}}\, dx$$

$$|(u, \psi_{m,\mathbf{k}})| \leqslant \mid u \mid_0 \int_\Omega \mid \Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}} \mid dx$$

[5] Die Bestimmung der $\psi_{m,\mathbf{k}}$ stellt ein Dirichletproblem mit verallgemeinerten Nullrandwerten dar, was durch die Bedingung $\psi_{m,\mathbf{k}} \in H = W_2{}^2(\Omega) \cap \mathring{W}_1{}^2(\Omega)$ ausgedrückt wird.

und es folgt $\psi_{m,\mathbf{k}} \in X_1$ mit

$$| \psi_{m,\mathbf{k}} |_1 \leqslant \int_\Omega | \Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}} | \, dx. \tag{4.10}$$

Für $| \Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}} |$ gilt die Abschätzung

$$| \Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}} | \leqslant \alpha_m N \left(\frac{2m}{h_0} \right)^2 | \varphi'' | \, | \varphi |^{N-2} \tag{4.11}$$

mit

$$| \varphi | = \sup_{t \in [0,1]} | \varphi(t) | \qquad \text{und} \qquad | \varphi'' | = \sup_{t \in [0,1]} | \varphi''(t) |.$$

Da $\Delta^2 \psi_{m,\mathbf{k}}$ ausserhalb eines Kubus der Kantenlänge $h_0/2m$ verschwindet, folgt mit Hilfe von (4.10), (4.11) und (4.9)

$$| \psi_{m,\mathbf{k}} |_1 \leqslant c_7 \left(\frac{h_0}{2m} \right)^N m^{N/2+2} = c_8 m^{2-N/2}. \tag{4.12}$$

Setzen wir dies in (4.8) für $n = 2^{N-1} m^N$ ein, denn für jedes m haben wir $2^N m^N = 2 \cdot 2^{N-1} m^N$ Funktionen $\psi_{m,\mathbf{k}}$, so erhalten wir

$$d^n = d_n^H(S_{X_1}) \geqslant c_9 m^{N/2-2} = c_{10} n^{-2/N+1/2}$$

für alle n der Form $n = 2^{N-1} m_N$, $m = 1, 2, \ldots$ mit von n unabhängigen Konstanten c_9 und c_{10}. Hieraus kann aber wegen der Monotonie der d^n auf die Gültigkeit der linken Ungleichung in (4.4) für alle natürlichen mit einer von n unabhängigen Konstanten c_1 geschlossen werden.

Anerkennung

Herrn Professor Dr. J. Nitsche möchte ich für Anregung und Unterstützung dieser Arbeit sehr danken.

Literatur

1. S. Agmon, "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems," Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965.
2. H. Amann, Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Hammerstein'sche Gleichung in Banachräumen, *Math. Z.* **111** (1969), 175–190.
3. R. C. Buck, Linear spaces and approximation theory, *in* "On Numerical Approximation" (R. E. Langer, Ed.), Proc. Symp. Wisconsin 1958, pp. 11–23, Madison, Wisc., 1959.
4. N. Dunford and J. T. Schwartz, "Linear Operators. Part I: General Theory," Interscience Publishers, New York, 1958.

5. A. L. GARKAVI, On the optimal net and the best cross section of a set in a normed space (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **26** (1962), 87–106; Englische Übersetzung: *Amer. Math. Soc. Transl.* **39** (1964), 111–132.
6. M. GOLOMB AND H. F. WEINBERGER, Optimal approximation and error bounds, *in* "On Numerical Approximation" (R. E. Langer, Ed.) Proc. Symp. Wisconsin 1958, pp. 117–190, Madison, Wisc., 1959.
7. A. N. KOLMOGOROV, Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *Ann. Math.* **37** (1936), 107–111.
8. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
9. J. MEINGUET, Optimal approximation and error bounds in seminormed spaces, *Numer. Math.* **10** (1967), 370–388.
10. J. NITSCHE, Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren I und II, *Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 2*, **16** (1967), 69–80 und 233–238.
11. W. RUDIN, L^2-approximations by partial sums of orthogonal developments, *Duke Math. J.* **19** (1952), 1–4.
12. I. SINGER, Cea mai bună approximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale, Editura Academiei Socialiste România, Bukarest, 1967.
13. W. I. SMIRNOV, "Lehrgang der höheren Mathematik," Teil V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.
14. V. M. TIHOMIROV, Einige Anmerkungen über n-dimensionale Durchmesser von Mengen in Banachräumen (Russian) *Uspehi Mat. Nauk* **20** (1965), 227–230.
15. V. M. TIHOMIROV, Some problems of approximation theory, *Sov. Math. Dokl.* **6** (1965), 202–205.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen wurde mir bekannt, dass sich der Satz 3 (Dualitätssatz) in allgemeinerer Form findet bei A. D. JOFFE AND V. M. TIKHOMIROV, Duality of convex functions and extremum problems, *Russian Math. Surveys* **23** (1968), 53–134, Theorem 3.3.